

Detekcja rozkładów o ciężkich ogonach

J. Śmiarowska, P. Jamer

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych
Politechnika Warszawska

24 kwietnia 2012

1 Rozkłady o ciężkich ogonach

- Informacje wstępne
- Rodzina podwykładnicza
- Rozkłady typu Pareto

2 Detekcja rozkładów o grubych ogonach

- Analiza problemu
- Wykresy kwantylowe
- Empiryczna średnia nadwyżka

1 Rozkłady o ciężkich ogonach

- Informacje wstępne
- Rodzina podwykładnicza
- Rozkłady typu Pareto

2 Detekcja rozkładów o grubych ogonach

- Analiza problemu
- Wykresy kwantylowe
- Empiryczna średnia nadwyżka

Rozkład o lekkim ogonie

Niech X będzie nieujemną zmienną losową o dystrybucancie F .
Zmienna losowa X ma rozkład o lekkim ogonie przy $x \rightarrow \infty$, jeśli

$$(\exists A, b > 0) (\exists x_0 > 0) (\forall x \geq x_0) \bar{F}(x) \leq Ae^{-bx}.$$

Rozkład o ciężkim ogonie

Nieujemna zmienna losowa X ma rozkład o ciężkim ogonie przy $x \rightarrow \infty$, jeśli nie ma rozkładu o lekkim ogonie.

Twierdzenie

Zmienna losowa nieujemna X ma ciężki ogon wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall t > 0) M_X(t) = \infty.$$

Dowód:

Pokażemy, że zmienna losowa ma lekki ogon wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall t < t_0) M_X(t) < \infty.$$

Warunek równoważny

(\Rightarrow) Z założenia mamy, że istnieją $A, b, x_0 > 0$ takie, że

$$(\forall x \geq x_0) \bar{F}(x) \leq Ae^{-bx}.$$

Zatem mamy

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} dF(x) = - \int_0^\infty e^{tx} d\bar{F}(x) = \\ &= [-e^{tx}\bar{F}(x)]_0^\infty + t \int_0^\infty \bar{F}(x) e^{tx} dx < \infty, \end{aligned}$$

bo dla odpowiednio małych t :

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{tx}\bar{F}(x)] \leq \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{tx}Ae^{-bx}] = \lim_{x \rightarrow \infty} [Ae^{(t-b)x}] = 0,$
- $\int_0^\infty \bar{F}(x) e^{tx} dx \leq \int_0^\infty Ae^{-bx} e^{tx} dx = \int_0^\infty Ae^{(t-b)x} dx < \infty.$

Warunek równoważny

(\Leftarrow) Załóżmy nie wprost, że zachodzi

$$(\forall t \leq t_0) M_X(t) < \infty,$$

ale zmienna losowa nie ma lekkiego ogona.

Zatem

$$(\forall A, b > 0) (\forall x_0 > 0) (\exists x \geq x_0) \bar{F}(x) > Ae^{-bx}.$$

Wówczas

$$M_X(t) = [-e^{tx}\bar{F}(x)]_0^\infty + t \int_0^\infty \bar{F}(x) e^{tx} dx < \infty,$$

ale dla $t > b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{tx}\bar{F}(x)] \geq \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{tx}Ae^{-bx}] = \lim_{x \rightarrow \infty} [Ae^{(t-b)x}] = \infty.$$

Zatem $M_X(t) = \infty$, co prowadzi do sprzeczności.

Definicja

Niech

$$\alpha_F := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{-\ln \bar{F}(x)}{x},$$

gdzie $F(0-) = 0$, F - dystrybuanta.

Twierdzenie

Założmy, że $\alpha_F = 0$, wówczas F ma ciężki ogon.

Dowód:

Niech $\alpha_F = 0$. Wówczas

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x' > 0) (\forall x \geq x') -\ln \bar{F}(x) \leq \varepsilon x.$$

Zatem po przeskalowaniu

$$(\forall x \geq 0) \bar{F}(x) \geq ce^{-\varepsilon x},$$

a stąd

$$(\forall s \geq \varepsilon) \int_0^{\infty} e^{sx} \bar{F}(x) dx = \infty.$$

Z dowolności ε dostajemy, że F ma ciężki ogon.

Rozkład Lognormalny

$$Y \sim e^{tX}, X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Policzmy k -ty moment Y :

$$m_{k,Y} = \mathbb{E}(Y^k) = \mathbb{E}(e^{ktX}) = M_X(kt) = e^{\mu kt + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 t^2}.$$

Zatem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_{k,Y}}{k!} t^k = \infty.$$

Co jest równoważne temu, że nie istnieje

$$M_Y(t), t > 0.$$

Zastosowanie: ubezpieczenia komunikacyjne.

Rozkład Weibulla

$$X \sim \mathcal{W}(r, c),$$
$$\bar{F}(x) = e^{-cx^r}, x > 0, c > 0.$$

Bezpośrednio z definicji widać, że

- gdy $r \geq 1$, to rozkład Weibulla ma lekki ogon,
- gdy $r < 1$, to rozkład Weibulla ma ciężki ogon.

Rozkład Pareto

$$X \sim \text{Par}(\alpha, c),$$
$$\bar{F}(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha, x > c$$

Bezpośrednio z definicji widać, że rozkład ma ciężki ogon.

Zastosowanie: ubezpieczenia przeciwpożarowe.

1 Rozkłady o ciężkich ogonach

- Informacje wstępne
- Rodzina podwykładnicza
- Rozkłady typu Pareto

2 Detekcja rozkładów o grubych ogonach

- Analiza problemu
- Wykresy kwantylowe
- Empiryczna średnia nadwyżka

Definicja

Dystrybuanta F , $F(0-) = 0$, jest podwykładnicza, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} = 2.$$

Oznaczenie: $F \in \mathcal{S}$.

Twierdzenie

Jeśli $F \in \mathcal{S}$, to F ma ciężki ogon.

Lemat

Niech $F \in \mathcal{S}$. Wówczas dla każdego $x' > 0$:

- 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-x')}{\bar{F}(x)} = 1,$
- 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) = 1.$

Dowód:

Niech $F \in \mathcal{S}$. Przyjmijmy $m(x) := -\ln \bar{F}(x)$. Wówczas z wcześniejszego twierdzenia wynika, iż wystarczy pokazać, że

$$\alpha_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{m(x)}{x} = 0.$$

Z lematu mamy, że dla każdego $x' > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x - x')}{\bar{F}(x)} = 1.$$

Co dla każdego $x' > 0$ daje nam

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln \bar{F}(x - x') - \ln \bar{F}(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (m(x) - m(x - x')) = 0.$$

Twierdzenie

Zatem

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x_0 > 0) (\forall x \geq x_0) m(x) - m(x-1) < \varepsilon.$$

Wynika stąd, że

$$m(x) \leq m(x-1) + \varepsilon \leq m(x-2) + 2\varepsilon \leq \dots \leq m(x-n) + n\varepsilon,$$

gdzie $x_0 \leq x - n < x_0 + 1$.

Możemy więc ogólniej napisać

$$m(x) \leq \sup_{x_0 \leq x' \leq x_0+1} m(x') + (x - x_0)\varepsilon, \quad x \geq x_0.$$

Ostatecznie z dowolności ε dostajemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m(x)}{x} = 0.$$

- 1 Rozkłady o ciężkich ogonach
 - Informacje wstępne
 - Rodzina podwykładnicza
 - Rozkłady typu Pareto
- 2 Detekcja rozkładów o grubych ogonach
 - Analiza problemu
 - Wykresy kwantylowe
 - Empiryczna średnia nadwyżka

Definicja

Powiemy, że funkcja $L : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ jest wolno zmieniającą się funkcją przy $x \rightarrow \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall t > 0) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

Oznaczenie: $L \in \mathcal{R}_0$.

Definicja

Dystrybuanta F jest typu Pareto z wykładnikiem $\alpha > 0$, jeśli

$$\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha} L(x)$$

przy $x \rightarrow \infty$, gdzie L jest funkcją wolno zmieniającą się.

Oznaczenie: $F \in \mathcal{R}_{-\alpha} \Leftrightarrow \bar{F} \sim L(x) x^{-\alpha}, x \rightarrow \infty$, gdzie $L \in \mathcal{R}_0$.

Twierdzenie

Jeśli $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, to $F \in \mathcal{S}$.

Dowód:

Niech X, X_1, X_2 iid $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

Niech $x > 0$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1)$ zdarzenie

$$\{X_1 + X_2 > x\}$$

implikuje zdarzenie

$$\{X_1 > (1 - \varepsilon)x\} \cup \{X_2 > (1 - \varepsilon)x\} \cup \{X_1 > \varepsilon x \cap X_2 > \varepsilon x\}.$$

Wynika stąd, że

$$P(X_1 + X_2 > x) \leq 2P(X > (1 - \varepsilon)x) + (P(X > \varepsilon x))^2$$

$$P(X_1 + X_2 > x) \leq 2\bar{F}((1 - \varepsilon)x) + (\bar{F}(\varepsilon x))^2$$

Zatem

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 > x)}{\overline{F}(x)} \leq 2$$

Z drugiej strony dla dowolnej dystrybuanty F mamy

$$\frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \geq 1 + F(x),$$

co po przejściu do granicy daje nam

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 2$$

1 Rozkłady o ciężkich ogonach

- Informacje wstępne
- Rodzina podwykładnicza
- Rozkłady typu Pareto

2 Detekcja rozkładów o grubych ogonach

- **Analiza problemu**
- Wykresy kwantylowe
- Empiryczna średnia nadwyżka

- $\{U_i : 1 \leq i \leq n\}$ — portfel roszczeń.
- $X_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ — całkowita suma roszczeń.
- $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$ — roszczenia uporządkowane tak, że

$$\min_{1 \leq i \leq n} U_i = U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \dots \leq U_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} U_i.$$

Wysokie roszczenie

Roszczenie będziemy nazywać dużym, gdy łączna suma roszczeń jest w znacznej mierze przez nie determinowana.

Powyższe stwierdzenie znajduje wiele interpretacji. Przykładowo roszczenie możemy nazywać dużym, gdy

- jego wartość jest nietypowa, pojawia się rzadko.
- stosunek $U_{(n)}$ do X_n jest duży. Czyli powiemy, że $U_{(n)}$ jest duże, gdy

$$U_{(n)}/X_n \stackrel{d}{=} Z$$

ma większość masy prawdopodobieństwa w okolicy 1.

- stanowi ono dużą część całkowitej sumy roszczeń X_n . Czyli powiemy, że $U_{(m)}$ jest duże, gdy

$$m \geq \min \{k : U_{(k)} > pX_n\},$$

gdzie p to odpowiednio duża część całkowitej sumy roszczeń.

Podejście I

Całkowita suma roszczeń jest duża, ponieważ największe roszczenie jest duże. Czyli matematycznie

$$P(X_n > x) \sim P(U_{(n)} > x), x \rightarrow \infty.$$

- Takie podejście prowadzi w naturalny sposób do podwykładniczej rodziny rozkładów \mathcal{S} .
- Statystyczna weryfikacja hipotezy $F = F_U \in \mathcal{S}$ jest jednak daleka od prostoty.

Podejście II

Opierając się na jednym z wcześniejszych twierdzeń. Rozkłady o ciężkich ogonach możemy wykrywać w oparciu o warunek

$$\alpha_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log(1 - F(x))}{x} = 0.$$

Statystycznie interesowałoby nas analizowanie warunku

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log(1 - F_n(U_{n-k}))}{U_{n-k}} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{n}{k}}{U_{n-k}} = 0,$$

gdzie $k/n \rightarrow 0$.

Jest on niestety nieweryfikowalny z uwagi na granicę we wzorze.

Podejście III

Możemy oprzeć nasze wnioskowanie na funkcji

$$\mu_F(x) = \mathbb{E}(U - x \mid U > x) = \int_x^\infty \frac{1 - F(y)}{1 - F(x)} dy,$$

wiedząc, że zachodzi relacja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mu_F(x) = \infty \Rightarrow \alpha_F = 0.$$

Na potrzeby obliczeń powyższy wzór przekształcić można do postaci

$$\mu_n(U_{(n-k)}) = \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n (U_{(j)} - U_{(n-k)}), \quad k/n \rightarrow 0.$$

Nie jest jednak statystycznie oczywistym jak badać, czy powyższe wyrażenie zbiega do ∞ .

- Ściśle formalne, statystyczne postawienie problemu wykrywania rozkładów o ciężkich ogonach okazało się być zadaniem trudnym.
- Koniecznym jest poświęcenie formalizmu na rzecz prostoty.
 - Skupimy się na porównywaniu ogonów rozkładów empirycznych z ogonami rozkładów wzorcowych.
 - Dobrym rozkładem wzorcowym jest tutaj rozkład wykładniczy

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0, \infty)}(x), \lambda > 0.$$

- Powiemy, że rozkład F ma cięższy ogon niż rozkład wykładniczy, jeżeli

$$1 - F(x) > ce^{-ax}, x \geq 0, a, c > 0.$$

- Zachodzenie powyższej nierówności dla wszystkich $a > 0$ gwarantuje nam, że

$$\alpha_F = 0.$$

1 Rozkłady o ciężkich ogonach

- Informacje wstępne
- Rodzina podwykładnicza
- Rozkłady typu Pareto

2 Detekcja rozkładów o grubych ogonach

- Analiza problemu
- **Wykresy kwantylowe**
- Empiryczna średnia nadwyżka

- Rozważamy jako rozkład wzorcowy standardowy rozkład wykładniczy o dystrybuancie

$$G \sim \text{Exp}(1).$$

- Jesteśmy zainteresowani sprawdzeniem, czy dystrybuanta empiryczna wielkości rozszczenia F ma ten sam rozkład co G z dokładnością do parametru λ :

$$F \sim \text{Exp}(\lambda).$$

- Sprawdzenia powyższego dokonamy tworząc wykres kwantylowy funkcji kwantylowej $Q_G \sim G$ oraz $Q_n \sim F$.

Definicja

Niech F będzie dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Wówczas mianem funkcji kwantylowej tego rozkładu określimy funkcję zdefiniowaną następująco

$$Q_F(y) = F^{-1}(y) = \inf \{x : F(x) \geq y\}.$$

Definicja

Niech F_n będzie dystrybuantą empiryczną zbudowaną na bazie próbki n – elementowej. Niech $U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \dots \leq U_{(n)}$ będzie wspomnianą próbką po uporządkowaniu. Empiryczną funkcją kwantylową zbudowaną na bazie powyższej próbki nazwiemy funkcję spełniającą poniższy warunek

$$Q_n(y) = U_{(k)} \Leftrightarrow \frac{k-1}{n} < y \leq \frac{k}{n}.$$

Wykres kwantylowy

Rozkład wykładniczy

- Nanosimy na układ współrzędnych punkty

$$\left(Q_G \left(\frac{k}{n} \right), Q_n \left(\frac{k}{n} \right) \right) = \left(-\frac{1}{\lambda} \log \left(1 - \frac{k}{n} \right), U_{(k)} \right).$$

- Jeżeli nasze dane pochodzą z rozkładu o ogonie zbliżonym do tego, jaki posiada rozkład wykładniczy, to na wykresie uzyskamy w przybliżeniu linię prostą.
 - Parametr λ^{-1} wyraża nachylenie tej prostej.
- Jeżeli nasze dane pochodzą z rozkładu o ogonie cięższym do tego, jaki posiada rozkład wykładniczy, wówczas funkcja rośnie szybciej niż linia prosta.
- Jeżeli nasze dane pochodzą z rozkładu o ogonie lżejszym do tego, jaki posiada rozkład wykładniczy, wówczas funkcja rośnie wolniej niż linia prosta.

Wykres kwantylowy

Poprawka na ciągłość

Zauważmy, że dla $k = n$ zachodzi

$$Q_G\left(\frac{k}{n}\right) = \infty.$$

Z tego względu, rysując wykres kwantylowy, często zamiast punktów

$$\left\{\frac{k}{n} : 1 \leq k \leq n\right\},$$

nanosi się na niego punkty

$$\left\{\frac{k}{n+1} : 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Jeżeli F ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy o parametrze λ .
Wówczas parametr ten możemy wyestymować z pomocą MNK:

$$\hat{\lambda}^{-1} = \frac{\sum_{k=1}^n U_{(k)} Q_G\left(\frac{k}{n+1}\right)}{\sum_{k=1}^n \left(Q_G\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)^2}.$$

Siła zależności liniowej

Możemy zbadać siłę zależności liniowej między Q_G oraz Q_n wykorzystując empiryczny współczynnik korelacji:

$$r(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\sum_{k=1}^n (u_{(k)} - \bar{u}) \left(Q_G \left(\frac{k}{n+1} \right) - \bar{Q}_G \right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(Q_G \left(\frac{k}{n+1} \right) - \bar{Q}_G \right)^2 \sum_{k=1}^n (u_{(k)} - \bar{u})^2}},$$

gdzie:

- $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_{(k)},$
- $\bar{Q}_G = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q_G \left(\frac{k}{n+1} \right) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 - \frac{k}{n+1} \right).$

Niech $U \sim \text{Exp}(\lambda)$. Wówczas ogonem dystrybuanty uciętego rozkładu wykładniczego nazwiemy funkcję

$$\bar{F}_{[0,a]}(x) = P(U > x \mid U > a) = \frac{P(U > x)}{P(U > a)} = e^{-\lambda(x-a)}, x > a.$$

Odpowiadająca jej funkcja kwantylowa, to

$$Q_{[0,a]}(y) = a - \frac{1}{\lambda} \log(1 - y), 0 < y < 1.$$

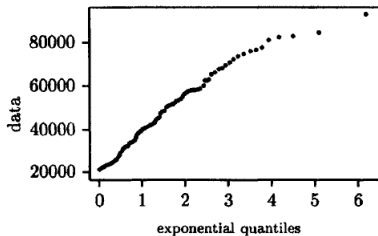
Estymatorem parametru a tak zdefiniowanego rozkładu jest punkt przecięcia wykresu kwantylowego z prostą $y = 0$.

Przy tworzeniu wykresu kwantylowego, jako rozkład wzorcowy można rozważać oczywiście nie tylko rozkład wykładniczy.

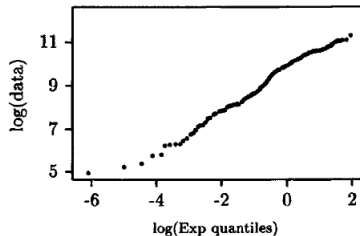
- **Rozkład normalny** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) : \left(\Phi^{-1} \left(\frac{k}{n+1} \right), U_{(k)} \right)$.
 - Wyraz wolny prostej estymuje parametr μ .
 - Współczynnik kierunkowy prostej estymuje parametr σ .
- **Rozkład lognormalny**: $\left(\Phi^{-1} \left(\frac{k}{n+1} \right), \log U_{(k)} \right)$.
- **Rozkład Pareto** $\text{Par}(\alpha, c) : \left(-\log \left(1 - \frac{k}{n+1} \right), \log U_{(k)} \right)$.
 - Wyraz wolny prostej estymuje parametr $\log c$.
 - Współczynnik kierunkowy prostej estymuje parametr α^{-1} .
- **Rozkład Weibulla** $\mathcal{W}(r, c) : \left(\log \left(-\log \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \right), \log U_{(k)} \right)$.
 - Wyraz wolny prostej estymuje parametr $-r^{-1} \log c$.
 - Współczynnik kierunkowy prostej estymuje parametr r^{-1} .

Przykład 1

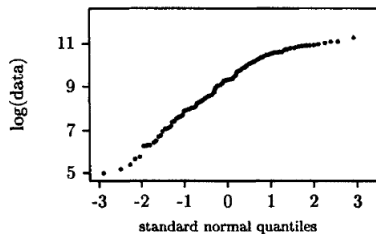
exponential quantile plot



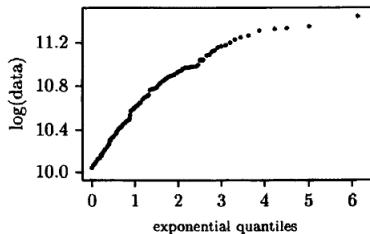
Weibull quantile plot



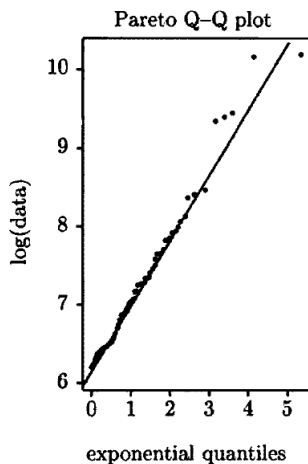
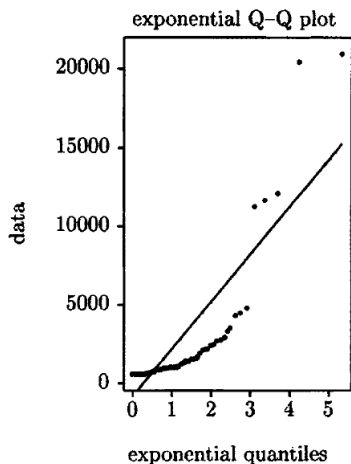
lognormal quantile plot



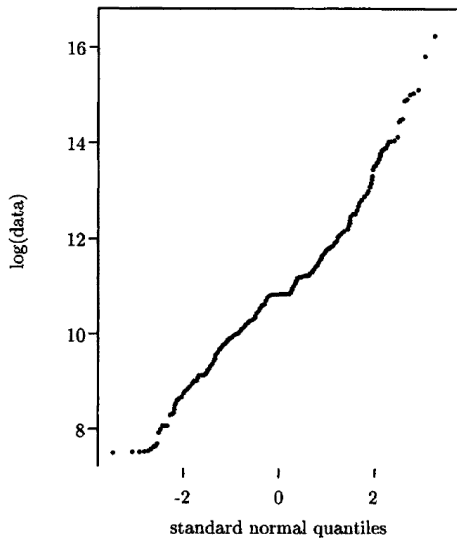
Pareto quantile plot



Przykład 2



Przykład 3



1 Rozkłady o ciężkich ogonach

- Informacje wstępne
- Rodzina podwykładnicza
- Rozkłady typu Pareto

2 Detekcja rozkładów o grubych ogonach

- Analiza problemu
- Wykresy kwantylowe
- Empiryczna średnia nadwyżka

Wzór empiryczny

Rozważać będziemy funkcję średniej nadwyżki

$$\mu_F(x) = \int_x^\infty \frac{1 - F(y)}{1 - F(x)} dy.$$

Wprowadzimy dla niej wzór empiryczny przy k takim, że $k/n \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}\mu_n(U_{(n-k)}) &= \int_{U_{(n-k)}}^\infty \frac{1 - F_n(y)}{1 - F_n(U_{(n-k)})} dy = \\ &= \frac{n}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} \int_{U_{(i)}}^{U_{(i+1)}} (1 - F_n(y)) dy = \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} (n-i) (U_{(i+1)} - U_{(i)}) = \\ &= \frac{1}{k} \left(\sum_{j=n-k+1}^n U_{(j)} - kU_{(n-k)} \right) = \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n (U_{(j)} - U_{(n-k)}).\end{aligned}$$

- Zauważmy, że dla rozkładu wykładniczego z parametrem λ

$$\mu_F(x) = \lambda^{-1} = \text{const.}$$

- Podobnie, jeśli $\mu_F(x) = \text{const}$, to F jest dystrybuantą rozkładu wykładniczego.
- Możemy więc stosując empiryczną funkcję $\mu_n(U_{(n-k)})$ porównywać rozkłady wartości roszczeń z rozkładem wykładniczym.

- Jeśli dystrybuanta F ma cięższy ogon niż dystrybuanta rozkładu wykładniczego. Wówczas jej empiryczna średnia nadwyżka

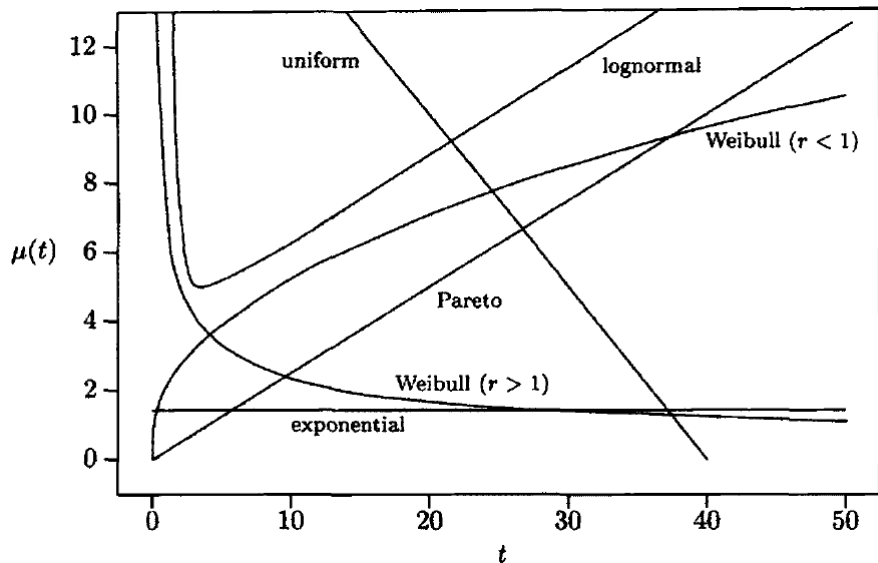
$$\{\mu_n (U_{(n-k)}) : 1 < k \leq n\}$$

będzie znajdowała się powyżej analogicznej funkcji dla rozkładu wykładniczego (będzie rosła).

- Jeśli dystrybuanta F ma lżejszy ogon niż dystrybuanta rozkładu wykładniczego. Wówczas jej empiryczna średnia nadwyżka

$$\{\mu_n (U_{(n-k)}) : 1 < k \leq n\}$$

będzie znajdowała się poniżej analogicznej funkcji dla rozkładu wykładniczego (będzie malała).



Dziękujemy za uwagę!